METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Aspecte generale

In general, un sistem de n ecuaţii liniare având coeficienţii $a_{ij} \in R$ ($i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$) şi termenii liberi $b_i \in R$, ($i = 1, ..., m$), cu n necunoscute, $x_j \in R$ ($i = 1, ..., n$), are următoarea formă:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \qquad \textbf{(2)}$$

$$[A] \cdot [X] = [b] \qquad \textbf{(3)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^t \\ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^t \end{matrix} \tag{4}$$

In funcţie de raportul în care se află m şi n putem avea următoarele cazuri:

- Pentru $m = n$ şi $det\,[A] \neq 0$ sistemul este compatibil determinat.
- Pentru $m < n$ sistemul este subdeterminat.
- Pentru $m > n$ sistemul este supradeterminat.

$$R = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \tag{5}$$

Unicitatea soluţiei

Un sistem de ecuaţii liniare are o soluţie unică numai dacă matricea *A* este nesingulară, adică determinantul acestei matrice este diferit de zero.

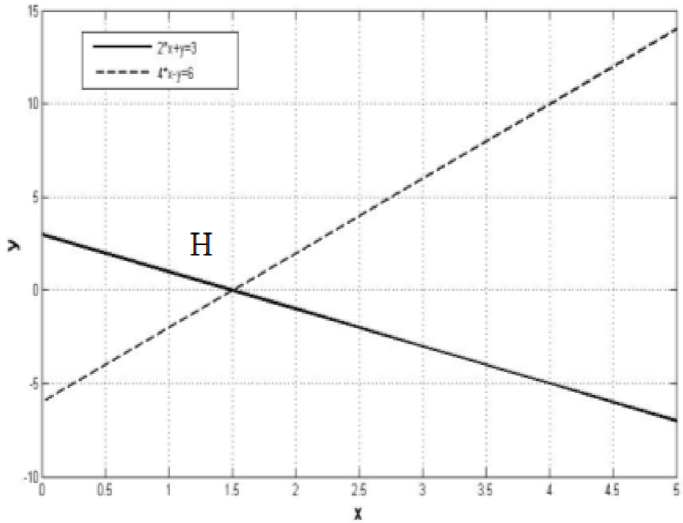

Fig. 1. Sistem de două ecuaţii liniare care are soluţie unică

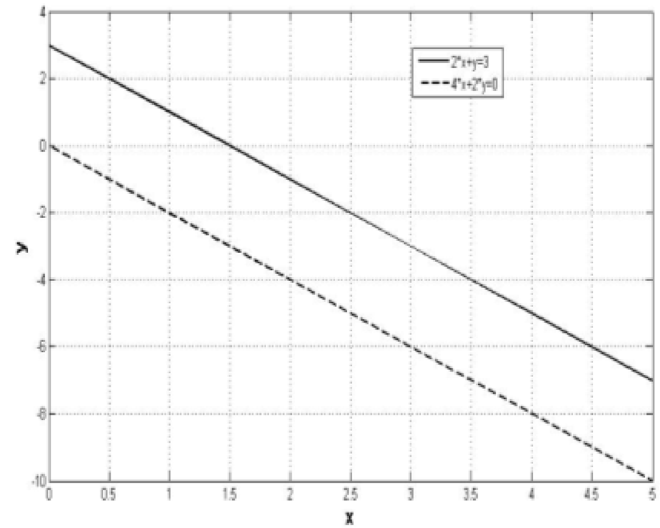

Fig. 2. Sistem de două ecuaţii liniare care nu are soluţie unică

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Condiţionare

Importanţa cunoaşterii condiţionării unei matrice decurge din faptul că rezultatele obţinute prin calcul numeric corespund întotdeauna unei probleme perturbate, ca urmare a efectelor erorilor de rotunjire.

Pentru a determina dacă valoarea determinatului matricei *A* este apropiată de zero, este nevoie de o referinţă în raport cu care valoarea determinantului să poate fi comparată, numită normă.

$$|A| << \|A\| \tag{6}$$

norme

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Norma 2:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A)} = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \qquad (7)$$

Norma 1:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \qquad (8)$$

Norma infinit:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \qquad (9)$$

Norma F:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad (10)$$

Numărul de condiţionare al matricei:

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \qquad (11)$$

Metode numerice de rezolvare

A. Metode directe

Tabelul 1. Tipuri de metode directe

Metoda	Forma inițială	Forma finală
Eliminarea Gauss	$A \cdot X = b$	$U \cdot X = c$
Descompunerea LU	$A \cdot X = b$	$L \cdot U \cdot X = b$
Eliminarea Gauss - Jordan	$A \cdot X = b$	$I \cdot X = c$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminarii Gauss

Metoda urmăreşte aducerea sistemului iniţial de ecuaţii liniare la una din formele superior (U) sau inferior (L) triunghiulară care poate fi rezolvată pe căi elementare.

Etape principale:

- **de eliminare;**
- **de determinare a soluţiilor.**

I. Etapa de eliminare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (12)$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

I. Etapa de eliminare

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Pentru a obţine zerouri pe prima coloana, din linile a doua şi a treia se scade prima linie înmulţită cu multiplicatorul a_{i1}/a_{11}:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

I. Etapa de eliminare

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_1, \quad i, j = 1,2,3$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right) a_{1n}^{(0)}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - \left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right) b_1^{(0)}, \quad i, j = 2,3 \qquad \textbf{(16)}$$

Pentru a obţine zerouri pe coloana a doua, din linia a treia se scade linia a doua, înmulţită cu multiplicatorul a_{i2}/a_{22} ($i=3$), obţinându-se forma finală (14), unde:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{2n}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) b_2^{(0)}, \quad i, j = 3 \qquad \textbf{(17)}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Generalizarea algoritmului Gauss

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, n$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) b_k^{(k-1)}, \quad i = k+1, n \tag{18}$$

II. Etapa de determinare a necunoscutelor

Necunoscutele se obţin prin retrosubstituire.

Se determină ultima necunoscută:

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \tag{19}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Rezultatul obţinut se înlocuieşte în a doua ecuaţia a sistemului (15):

$$x_1 = \frac{\left(b_1^{(0)} - \sum_{n=2}^{3} a_{1n}^{(0)} x_n\right)}{a_{11}^{(0)}} \qquad \textbf{(19)}$$

In final, relaţia (20) se înlocuieşte în prima ecuaţie a sistemului (15):

$$x_2 = \frac{\left(b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3\right)}{a_{22}^{(1)}} \qquad \textbf{(20)}$$

Procedura pentru determinarea soluţiilor poartă denumirea de *substituţie înapoi* şi poate fi generalizată astfel:

$$x_i = \frac{\left(b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^{(i-1)} x_k\right)}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = n,1 \qquad \textbf{(21)}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminării Gauss - Jordan

Metoda presupune transformarea sistemului:

$$[A]\cdot[X]=[b] \tag{22}$$

într-un sistem echivalent

$$[A^*]\cdot[X]=[b^*] \tag{23}$$

în care matricea *A se identifică cu matricea unitate *I*, ceea ce permite determinarea rapidă a soluţiei:**

$$[X]=[b^*] \tag{24}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminării Gauss - Jordan

Se consideră un sistem de 3 ecuaţii liniare cu 3 necunoscute scris sub forma extinsă:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{25}$$

Se pleacă de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Matricei *A* i se asociază prin extidere la dreapta vectorul termenilor liberi *b*:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminării Gauss - Jordan

In primul pas se va împărţi ultima linie la termenul $a^{(2)}_{33}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(I)} & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \tag{28}$$

unde:

$$a_{33}^{(I)} = 1, \quad b_3^{(I)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \tag{29}$$

Se scade apoi linia a treia înmulţită cu termenul $a_{i3}^{(i-1)}$, i=1, 2 din primele două linii:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(I)} & b_1^{(I)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(I)} & b_2^{(I)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(I)} & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \tag{30}$$

unde:

$$a_{13}^{(I)} = 0, \quad a_{23}^{(I)} = 0, \quad b_2^{(I)} = b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} b_3^{(I)}, \quad b_1^{(I)} = b_1^{(0)} - a_{13}^{(0)} b_3^{(I)} \tag{31}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminării Gauss - Jordan

In pasul al doilea se va împărţi a doua linie la termenul $a^{(1)}_{22}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(I)} & b_1^{(I)} \\ 0 & a_{22}^{(II)} & a_{23}^{(I)} & b_2^{(II)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(I)} & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

unde:

$$a_{22}^{(II)} = 1, \quad b_2^{(II)} = \frac{b_2^{(I)}}{a_{22}^{(I)}} \quad (33)$$

Urmează efectuarea operaţiei de scădere a celei de a doua linii, înmulţită cu termenul $a^{(i-1)}_{i2}$ i = 1, din prima linie:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(II)} & a_{13}^{(I)} & b_1^{(II)} \\ 0 & a_{22}^{(II)} & a_{23}^{(I)} & b_2^{(II)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(I)} & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

unde:

$$a_{12}^{(II)} = 0, \quad b_1^{(II)} = b_1^{(I)} - a_{12}^{(I)} b_2^{(II)} \quad (35)$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metoda eliminării Gauss - Jordan

In ultimul pas, se împarte prima linie la $a^{(0)}_{11}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(III)} & a_{12}^{(II)} & a_{13}^{(I)} & b_1^{(III)} \\ 0 & a_{22}^{(II)} & a_{23}^{(I)} & b_2^{(II)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(I)} & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \tag{36}$$

unde:

$$a_{11}^{(III)} = 1, \quad b_1^{(III)} = \frac{b_1^{(II)}}{a_{11}^{(0)}} \tag{37}$$

Dacă în forma se introduc relaţiile (29), (31), (33), (35) şi (37) rezultă:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1^{(III)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(II)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(I)} \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$[I]\cdot[X] = [b^*] = [b_1^{(III)}, b_2^{(II)}, b_3^{(I)}] \tag{39}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Metode bazate pe factorizarea LU a matricei coeficienţilor

Prin factorizarea unei matrice pătratice *A* de ordinul *n* se înţelege exprimarea sa sub forma unui produs de două matrice de acelaşi ordin.

$$[A]=[L]\cdot[U] \tag{40}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{41}$$

Pentru a rezolva sistemul scris sub formă matriceală se poate folosi descompunerea (40):

$$[A]=([L]\cdot[U])\cdot[X]=[L]\cdot([U]\cdot[X])=[b] \tag{42}$$

$$\begin{cases} [L]\cdot[Y]=[b] \\ [U]\cdot[X]=[Y] \end{cases} \tag{43}$$

Factorizarea Doolittle

Factorizarea Doolittle se caracterizează prin faptul că elementele diagonale ale matricei *L* au valorile $l_{ii} = 1$, unde $i = 1, ..., n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(44)}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

- **din prima linie:** $a_{11} = u_{11}, \quad a_{12} = u_{12}, \quad a_{13} = u_{13}$ **(45)**
- **a doua linie:** $a_{21} = l_{21} \cdot u_{11}, \quad a_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + u_{22}, \quad a_{23} = l_{21} \cdot u_{13} + u_{23}$ **(46)**
- **a treia linie:** $a_{21} = l_{21} \cdot u_{11}, \quad a_{32} = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22}, \quad a_{33} = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33}$ **(47)**

Expresiile (45), (46) şi (47) evidenţiază următoarele operaţii de calcul al elementelor matricelor de factorizare:

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \tag{48}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad u_{22} = a_{21} - l_{21} \cdot u_{12}, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} \tag{49}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \quad u_{33} = \left(a_{33} - l_{31} \cdot u_{13}\right) - l_{32} u_{23} \tag{50}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Generalizări:

- **elementele de pe prima linie din matricea de factorizare *U*:**

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = \overline{1, n} \tag{51}$$

- **elementele de pe liniile *i*, *i* = 2, ..., *n*, ale matricei *L*:**

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{u_{ii}}, \quad j = 1 \tag{52}$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) \cdot \frac{1}{u_{jj}}, \quad j = \overline{2, i-1} \tag{53}$$

- **elementele liniei *i* a matricei *U*:**

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \quad j = \overline{i, n} \tag{54}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Factorizarea Crout

Factorizarea Crout se caracterizează prin faptul că elementele diagonale ale matricei *U* au valorile $u_{ii} = 1$, unde $i = 1, \ldots, n$.

- **elementele de pe prima coloană din matricea de factorizare *L*:**

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (55)$$

- **elementele de pe coloanele *j*, $j = 2, \ldots, n$, ale matricei *U*:**

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{ii}}, \quad i = 1 \qquad (56)$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) \cdot \frac{1}{l_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, j-1 \qquad (57)$$

- **elementele coloana *j* a matricei *L*:**

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right), \quad i = j, \ldots, n \qquad (58)$$

Factorizarea Cholesky

Factorizarea Cholesky se poate aplica în situaţia în care matricea *A* este simetrică şi pozitiv definită, fiind mai eficientă din punct de vedere numeric.

Matricea *A* este simetrică dacă: $A = A^t$ **(matricea transpunsă);**

Matricea *A* este pozitiv definită dacă: $X^t \cdot A \cdot X > 0$

Descompunerea matricei *A*: $[A] = [L] \cdot [L]^t$ **(59)**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}u_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \tag{60}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

- **din prima coloană:**

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 && \Rightarrow && l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{21} &= l_{11} l_{21} && \Rightarrow && l_{21} = a_{21} / l_{11} \\ a_{31} &= l_{11} l_{31} && \Rightarrow && l_{31} = a_{31} / l_{11} \end{aligned} \qquad \textbf{(61)}$$

- **a doua coloană:**

$$\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2 && \Rightarrow && l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ a_{32} &= l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} && \Rightarrow && l_{32} = \left(a_{32} - l_{21} l_{31}\right) / l_{22} \end{aligned} \qquad \textbf{(62)}$$

- **a treia coloană:**

$$a_{22} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \qquad \Rightarrow \qquad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} \qquad \textbf{(63)}$$

Generalizări:

Un element reprezentativ din matricea $L \cdot L^t$ situat sub diagonala principală:

$$(LL^t)_{ij} = l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + \ldots + l_{ij}l_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk}, \quad i \geq j \qquad \textbf{(64)}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk}, \quad i = j,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n \qquad \textbf{(65)}$$

Pentru $j = 1$, relaţia (65) devine:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = a_{i1}/l_{11}, \quad i = 2,\ldots,n \qquad \textbf{(66)}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} + l_{ij}l_{jj} \qquad \textbf{(67)}$$

Generalizări:

Dacă *i* = *j*, se obţine:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j = 2,\ldots,n \tag{64}$$

Dacă *i* ≠ *j*, se obţine:

$$l_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right)}{l_{jj}}, \quad j = 2,\ldots,n-1, \quad i = j+1,\ldots,n \tag{65}$$

Metode iterative

Permit determinarea soluţiei exacte a unui sistem de ecuaţii liniare numai atunci când s-ar parcurge un număr nelimitat (teoretic infinit) de iteraţii.

In principiu, se porneşte de la o aproximaţie iniţială, notată *X*0, şi se construieşte un şir de aproximaţii succesive *X*0, *X*1, ..., *Xk*, ... care în anumite condiţii converge către soluţia exactă, notată *X.**

$$X^{k+1} = F\left(X^{k}\right), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Metoda Jacobi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{66}$$

Dacă se explicitează fiecare necunoscută a sistemului în funcţie de celelalte necunoscute, se obţine:

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots - a_{1j}x_j - \ldots - a_{1n}x_n)/a_{11}; \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2j}x_j - \ldots - a_{2n}x_n)/a_{22}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = (b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{2n}x_n)/a_{ii}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nj}x_j - \ldots - a_{n.n-1}x_{n-1})/a_{nn}. \end{cases} \tag{67}$$

Metoda Jacobi

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k) / a_{ii} \ , \quad i = 1,\ldots,n \ , \quad k \geq 0 \qquad \textbf{(68)}$$

Aplicarea cu succes a metodei Jacobi necesită o condiţie legată de matricea *A* care trebuie să fie dominant diagonală:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \textbf{(69)}$$

Condiţia de convergenţă impusă procesului iterativ:

$$\max_i \left(\left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \right) \leq E_{\max} \qquad \textbf{(70)}$$

Metoda Seidel – Gauss

Relaţia de calcul iterativ:

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{k}) / a_{ii}\,, \quad i = 1,\ldots,n\,, \quad k \geq 0 \qquad \textbf{(71)}$$

Ilustrarea îmbunătăţirii vitezei de convergenţă:

$$x_i^{*} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{*} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{*} \quad i = 1, \ldots, n \qquad \textbf{(72)}$$

$$e_i^{k+1} = x_i^{k+1} - x_i^{*} \qquad \textbf{(73)}$$

$$e_i^{k+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{k} \quad i = 1, \ldots, n \qquad \textbf{(74)}$$

Metoda Seidel – Gauss modificată

Relaţia de calcul iterativ:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x_i^{k+1} - x_i^k\right) \quad i = 1, \ldots, n \qquad \textbf{(75)}$$

Noua aproximaţie se determină în funcţie de aproximaţia calculată cu metoda Seidel-Gauss obişnuită căreia i se aplică o corecţie depedentă de factorul de accelerare:

$$\left(x_i^{k+1}\right)^* = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k \qquad \textbf{(76)}$$

$$x_i^{k+1} = \left(x_i^{k+1}\right)^* + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x_i^{k+1} - x_i^k\right) \quad i = 1, \ldots, n \qquad \textbf{(77)}$$

Metoda Seidel – Gauss modificată

Metoda se aplică în doi paşi:

- **se determină noua aproximaţie cu formula metodei Seidel-Gauss obişnuită;**

- **se calculează corecţia folosind aproximaţia calculată şi cea din iteraţia anterioară, iar apoi se determină noua aproximaţie prin aplicarea acestei corecţii valorii calculate cu metoda Seidel-Gauss obişnuită.**

$$x_i^{k+1} \leftarrow \left(x_i^{k+1}\right) + \omega_1 \cdot \left(x_i^{k+1} - x_i^k\right) \quad \omega_1 = 1 - \frac{1}{\alpha} \qquad \textbf{(78)}$$

$$x_i^{k+1} \leftarrow \left(x_i^{k}\right) + \omega_2 \cdot \left(x_i^{k+1} - x_i^k\right) \quad \omega_2 = 2 - \frac{1}{\alpha} \qquad \textbf{(79)}$$

Metoda Seidel – Gauss modificată

Modul în care evoluează procesul aproximaţiilor succesive este dependent în mare măsură de felul în care se alege coeficientul de accelerare.

Cazul 1. α = 1, ω1 =0, ω2 = 1. Rezultă: $x_i^{k+1} \leftarrow x_i^{k+1}$

Cazul 2. α = 1/2, ω1 =-1, ω2 = 0. Rezultă: $x_i^{k+1} \leftarrow x_i^{k} \left(\leftarrow x_i^{k-1} \ldots \leftarrow x_i^{0}\right)$;